rieures, et qui interviennent, dans son édification, avec leur vérité catégorique et leur signification intuitive. Or, la situation de la logique à une extrémité de l'échelle des sciences ne lui permet pas de se suspendre à une science préalablement constituée. Si l'on veut néanmoins exprimer le savoir implicitement utilisé dans le travail d'axiomatisation de la logique, ce n'est pas à l'intérieur de la logique qu'on pourra le faire, mais dans une discipline nouvelle qui prendrait pour objet les formules de la logique axiomatisée et les règles de leur maniement. La métalogique joue ainsi, par rapport à la logique, le même rôle que la métamathématique par rapport à la mathématique. Il serait sans doute exagéré de dire qu'elle est née de l'axiomatisation de la logique : en un sens, tous les logiciens avaient, à quelque degré, fait déjà de la métalogique, mais ils en faisaient sans le savoir. L'axiomatisation a obligé d'en prendre conscience, et de la distinguer expressément de la logique à laquelle elle est attachée comme à son objet. Au calcul formel, langue objective, vient ainsi se superposer une métalangue, qui comprend notamment les règles de syntaxe du calcul formel, et les règles sémantiques pour son interprétation concrète.

Naturellement, rien n'empêche maintenant de prendre à son tour la métalangue comme objet d'étude, d'en formuler la syntaxe, puis d'organiser celle-ci en une théorie déductive, qu'on pourra axiomatiser, symboliser, formaliser. Seulement, on usera par là même d'une nouvelle métalangue ou, si l'on préfère, on créera un objet pour une nouvelle métalogique. Et l'on peut ainsi, du moins en théorie, continuer indéfiniment ces étagements, le mot « indéfiniment » marquant l'impossibilité de tracer une limite à la régression formalisatrice, et d'éliminer, au point de départ de l'élaboration axiomatique, toute trace d'intuition.

Chapitre IV

LA MÉTHODE AXIOMATIQUE DANS LA SCIENCE

§ 23. Avantages de la méthode axiomatique. — A ses commencements, la mise en forme axiomatique d'une théorie déductive pouvait sembler d'un intérêt limité. Parmi les mathématiciens eux-mêmes, beaucoup n'y voyaient guère plus qu'un procédé élégant d'exposition, d'un raffinement assez superflu, une sorte de jeu intellectuel apte à satisfaire des esprits excessivement scrupuleux quant à la rigueur logique, mais en marge du travail scientifique vraiment productif. Par son caractère délibérément formel, l'axiomatique ne s'interdisait-elle pas, en effet, d'enrichir d'aucune substance nouvelle le contenu de notre connaissance ? Et son utilité comme méthode demeurait douteuse, non seulement pour les applications pratiques, mais même à l'intérieur de la science pure. L'histoire de la science, cependant, montre surabondamment que ce sont souvent les recherches initialement les plus désintéressées qui se révèlent finalement les plus fécondes. Après tout, un esprit sceptique n'eût-il pas produit, avec autant d'apparence, des objections fort semblables lorsque les Grecs, mettant en forme déductive un corps de vérités empiriques, constituèrent la mathématique comme science rationnelle, engageant ainsi l'humanité dans l'ère scientifique ?

A la réflexion, les avantages de la méthode axiomatique sont manifestes. Elle est d'abord un précieux instrument d'abstraction et d'analyse. Le passage d'une théorie concrète à la même théorie axiomatisée, puis formalisée, renouvelle, en le prolongeant, le travail d'abstraction qui conduit, par exemple, du nombre concret, tas de pommes ou de cailloux, au nombre arithmétique, puis de l'arithmétique à l'algèbre, avec le remplacement des termes individuels par des variables dont les rapports seuls sont déterminés, enfin de l'algèbre classique à l'algèbre moderne, où non seulement les objets, mais encore les opérations effectuées sur ces objets deviennent à leur tour concrètement indéterminées, n'étant fixées que par quelques propriétés fondamentales très abstraites. D'autre part, avant le traitement axiomatique, les notions fondamentales d'une théorie demeurent souvent encore confuses, elles ont des compréhensions à la fois trop riches et insuffisamment explicitées : rien ne nous garantit alors que ces divers éléments resteront toujours compatibles, rien ne nous prémunit contre le danger de glisser inconsciemment, dans nos raisonnements, de l'un à l'autre. En obligeant à isoler certaines propriétés expressément énoncées dans les axiomes, et à n'utiliser qu'elles ou celles qu'on en aura déduites, la méthode axiomatique poursuit l'analyse des notions premières.

Un progrès dans l'abstraction va toujours de pair avec un progrès dans la généralité : en laissant tomber certaines des déterminations dissociées par l'analyse, la réduction de la compréhension lève des restrictions et assure un élargissement de l'extension. Généraliser, dit

Russell, c'est transformer une constante en une variable : tel est précisément le travail de l'axiomaticien lorsque à la droite, la congruence, ..., il substitue les x, y, ..., qui satisfont aux relations qu'énoncent les postulats. Ainsi, quand on écarte les significations intuitives, toujours spéciales, on ne se rend pas seulement capable de penser d'une manière plus dépouillée la théorie initiale, on forge du même coup un instrument intellectuel plurivalent, utilisable pour toutes les théories isomorphes à la première. De même qu'une fonction propositionnelle est, comme on l'a dit, un « moule à propositions », de même une théorie axiomatisée devient une sorte de « fonction théorique », un moule à théories concrètes. Le défaut d'univocité, loin de nuire aux définitions par postulats, fait au contraire leur intérêt. L'indétermination d'une structure formelle n'est pas indigence, du moment qu'elle n'est pas quelconque, mais réglée par des conditions très précises. La pluralité des possibles, dans des limites exactement tracées, représente au contraire une richesse virtuelle. Ainsi obtient-on, avec l'axiomatique, une importante économie de pensée : on rassemble plusieurs théories en une seule, on pense le multiple dans l'un.

Mais on gagne beaucoup aussi pour le savoir lui-même. Premièrement dans son organisation d'ensemble. Comme l'anatomie comparée, guidée par le principe de l'identité de plan, discerne sous leur pittoresque variété les organes homologues, de même l'axiomatique, en décelant les analogies formelles, révèle des correspondances insoupçonnées entre divers domaines d'une même science, et même des parentés entre des sciences qui semblaient étrangères. En dégageant la *structure invariante* commune à des théories apparemment hétérogènes, elle permet de les dominer par la pensée et d'embrasser du regard, en une vue plus synthétique, de vastes paysages intellectuels qu'on ne connaissait encore que par fragments. A quoi les esprits plus attentifs à l'accroissement quantitatif des connaissances qu'à leur organisation harmonieuse trouveront aussi, finalement, leur profit. Car cette organisation rend sensibles des lacunes, que l'analogie invite à combler. Chaque théorie profite de celles qu'on lui sait maintenant apparentées. On transfère ici, où rien d'intuitif ne les suggérait, les résultats acquis ailleurs. La rigueur de la méthode d'exposition conduit ainsi, en fin de compte, à sa fécondité pour la découverte.

A ces avantages qu'offrent déjà, à quelque degré, les premières axiomatiques, viennent naturellement se combiner, dans les axiomatiques formalisées, ceux de tout calcul symbolique : sûreté, objectivité. Le caractère aveugle et quasi mécanique de ses démarches n'est pas son moindre intérêt : il permet de les faire exécuter par une machine, et de réserver ainsi l'esprit pour les opérations du niveau supérieur. Par la symbolisation et la formalisation des théories, et à la faveur des isomorphismes ainsi révélés, les grandes calculatrices américaines sont en train de devenir, sinon de vraies « machines à penser », du moins des auxiliaires scientifiques dont les aptitudes dépassent très largement l'exécution des opérations ou problèmes purement numériques. Et parmi les problèmes non numériques qu'elles sont aptes à résoudre figurent précisément les *problèmes de décision* concernant les axiomatiques formalisées. Ces usages sont encore nouveaux et leurs développements imprévisibles, mais on conçoit que déjà, sans l'aide des machines et pour l'esprit réduit à ses seules ressources, la symbolisation et la formalisation portent l'abstraction axiomatique, si l'on peut dire, à la seconde puissance.

§ 24. L'AXIOMATISATION DES MATHÉMATIQUES. — Il serait difficile de mesurer exactement la part qui revient à la méthode axiomatique dans l'essor de la mathématique contemporaine. Plutôt que d'une causalité nettement orientée, sans doute faudrait-il souvent parler d'actions récurrentes ou conjuguées. La théorie des groupes, par exemple, dont on a pu dire qu'elle est la mathématique dépouillée de sa substance et réduite à sa pure forme, est née avant elle et s'est d'abord développée de façon indépendante ; mais l'esprit dont elle s'inspire est si conforme à celui de l'axiomatique, et les problèmes souvent si voisins, que les deux ordres de recherches se trouvent aujourd'hui associés de façon tout à fait intime (1). Justement parce qu'elle n'est pas une invention isolée et localisée, surgie accidentellement, parce qu'elle prend appui sur les tendances mêmes qui caractérisent l'esprit mathématique européen et qui n'ont fait que s'exaspérer depuis un siècle, la méthode axiomatique se laisse mal dissocier. Les traits qu'elle accuse sont déjà aisément reconnaissables dans la pensée mathématique classique : abstraction et généralisation croissantes, refoulement de l'intuition par la logique, subordination du contenu à la structure, établissement de correspondances unificatrices, etc. Il n'en reste pas moins que, pour avoir « appris aux mathématiciens à *penser axiomatiquement* »,

(1) Cf. G. JUVET, *La structure des nouvelles théories physiques*, p. 169 : « Toute géométrie cohérente est la représentation d'un certain groupe ; or toute géométrie repose aussi sur un système d'axiomes, donc toute axiomatique est aussi, d'un certain point de vue, la représentation d'un certain groupe ; c'est le groupe des opérations qui sont définies par les axiomes et qui agissent sur les objets dont traitent ces axiomes. » Cf., du même auteur, *L'axiomatique et la théorie des groupes*, Congrès intern. de Phil. scientifique, 1935, vol. VI.

Hilbert a profondément modifié le « style mathématique », là même où la méthode axiomatique n'est pas systématiquement employée (1).

Elle l'est de plus en plus. Toutes les théories mathématiques, depuis l'arithmétique et la théorie des ensembles jusqu'au calcul des probabilités, ont aujourd'hui été axiomatisées, et souvent de multiples façons. En France, le grand traité publié progressivement sous le pseudonyme générique de N. Bourbaki a entrepris d'exposer selon cette méthode l'ensemble des mathématiques. On saisit bien, sur le cas d'une théorie encore assez proche de ses origines concrètes comme est celle des probabilités, comment l'axiomatisation débarrasse la science des problèmes concernant l'essence des entités dont elle traite, problèmes dont naguère une science rationnelle ne croyait pas pouvoir s'affranchir. La partie la plus pénible d'un traité des probabilités était souvent l'introduction, où l'auteur se jugeait tenu de préciser ce qu'était cette notion dont il entendait faire la science. Il se trouvait alors pris dans ce dilemme : ou bien nous renvoyer à l'intuition en parlant de cartes, de dés, de sous, de boules ; ou bien donner une définition abstraite dont il pouvait bien masquer, mais non supprimer la circularité : la probabilité, rapport du nombre des cas favorables à celui des cas possibles, *pourvu que ceux-ci soient également probables*. Cette difficulté notoire illustre à merveille ce qu'a d'incommode et de transitoire la phase de la déduction concrète, où l'on doit et ne peut justifier les principes. Les choses étaient claires dans la phase empirique et

(1) Cf. J. Dieudonné, *David Hilbert*, dans Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, p. 297 ; C. Chevalley, Les variations du style mathématique, *Rev. de métaph.*, 1935, p. 375-384.

inductive : en nous laissant guider par notre sentiment intuitif des probabilités, nous voyons bien, par exemple, qu'il n'y a pas de raison pour que pile l'emporte plutôt que face, et nous arrivons bientôt à établir les deux lois, que l'expérience vérifiera, des probabilités totales et des probabilités composées. Et cela redeviendra clair avec la phase axiomatique, celle de la déduction abstraite : les deux lois seront maintenant posées comme des principes, lesquels donneront de la probabilité une définition implicite : la probabilité, c'est simplement la « chose » qui est telle que se vérifient sur elle les deux principes.

Cette purification conceptuelle initiale n'est encore que le moindre bienfait de la méthode. L'analyse axiomatique, on l'a vu, dégage les structures des théories particulières déjà constituées, et révèle ainsi les analogies formelles entre des théories souvent fort éloignées par leur contenu et, pour cette raison, demeurées jusque-là indépendantes. C'est le cas, par exemple, pour la théorie de la mesure et le calcul des probabilités. De même, on découvre des structures topologiques dans des ensembles d'éléments qui ne sont plus des points, mais des fonctions, ou même des éléments essentiellement discontinus comme les nombres entiers. La théorie des espaces abstraits, ou topologie générale, due à M. Fréchet, est ainsi l'un des plus beaux fruits de la méthode axiomatique. Des théories mathématiques se trouvent également mises en correspondance avec des théories extra-mathématiques, et notamment des théories logiques : le calcul des probabilités avec certaines logiques plurivalentes, la topologie avec certains calculs de logique modale. Éclairées d'un jour nouveau par un isomorphisme, d'anciennes théories peuvent recevoir des développements inattendus. La similitude des fonctions conduit aussi à créer, pour une théorie, des notions abstraites que rien ne pouvait suggérer tant qu'on la tenait assujettie à son interprétation primitive, et ainsi naissent de nouveaux êtres mathématiques.

Ce ne sont pas seulement les théories particulières qui profitent du traitement axiomatique. La physionomie de l'ensemble des mathématiques s'en trouve transformée. En raison des parentés insoupçonnées qui soudain s'y révèlent, l'univers mathématique est redistribué. L'ordre traditionnel (1), qui répartissait les disciplines mathématiques selon les objets étudiés (arithmétique, algèbre, analyse infinitésimale, géométrie), paraît aujourd'hui aussi superficiel que celui des anciennes classifications zoologiques, groupant les animaux selon leurs ressemblances extérieures (aquatiques, terrestres, aériens) au lieu de se fonder sur la similitude des structures. On coordonne maintenant des théories qui traitent d'objets très différents, mais doués de propriétés formelles analogues : la théorie des nombres premiers voisine avec celle des courbes algébriques, la géométrie euclidienne avec les équations intégrales symétriques. Et la subordination se fonde sur la hiérarchie des structures, allant des plus simples et des plus générales aux plus complexes et aux plus spéciales. D'abord quelques structures maîtresses, d'un caractère très large : structures algébriques, structures d'ordre, structures topologiques. Puis des structures déjà plus complexes et différenciées, où se combinent organiquement deux ou plusieurs de ces structures

(1) La fin de cet alinéa est directement inspirée de : N. Bourbaki, *L'architecture des mathématiques*, dans Le Lionnais, *ouv. cité*, p. 43-44 ; J. Dieudonné, *L'axiomatique dans les mathématiques modernes*, Congrès intern. de Phil. des Sciences, 1949, vol. III, p. 48 ; C. Chevalley, *art. cit.*, p. 383-4.

maîtresses : par exemple, l'algèbre topologique. Ensuite seulement des théories plus spéciales, où les éléments commencent à prendre une individualité plus marquée : c'est à ce niveau qu'on retrouve la plupart des théories de la mathématique classique. Seulement, au lieu de demeurer indépendantes et quasi isolées, elles apparaissent maintenant comme déterminées par des entrecroisements divers de quelques théories plus générales. Par exemple, l'ensemble des nombres réels peut être considéré comme un corps, ou comme un ensemble ordonné, ou comme un espace topologique, etc. : de sorte que les propriétés des nombres réels sont, pour une part, celles qu'on peut lire dans les théorèmes qui leur sont applicables de chacune des théories correspondantes, et pour une autre part celles qui résultent de la validité simultanée de ces diverses théories ou de plusieurs d'entre elles.

§ 25. L'axiomatisation dans les autres sciences. — Le traitement axiomatique n'a pas seulement été appliqué aux mathématiques, il a débordé de part et d'autre.

On ne s'étonnera pas qu'une méthode qui se propose de supplanter l'intuition par la logique ait trouvé son terrain d'élection dans la logique même. Cette science en fait aujourd'hui un emploi régulier et systématique. Au contraire, son usage diminue à mesure qu'on descend l'échelle des sciences, qu'on passe de la mécanique aux autres parties de la physique, et de là aux autres sciences de la nature. En fait, elle n'a guère dépassé encore le domaine de la physique. Les essais qu'on en a tentés dans les sciences ultérieures, comme Woodger l'a fait en biologie, demeurent sporadiques, et ont surtout un intérêt de curiosité. Non qu'aucune science répugne par nature à son emploi. Mais celui-ci, pour être fructueux, ne doit venir qu'à son heure, et lorsque la science intéressée est parvenue à un certain degré de maturité. Il y a comme une loi du développement des sciences, qui les fait passer, dans un ordre irréversible et chacune à son tour selon le rang qu'elle occupe dans la hiérarchie, par quatre étapes successives : descriptive, inductive, déductive, axiomatique. Une axiomatique reste assez vaine si elle ne se construit pas sur une théorie déductive préalable, laquelle n'a de valeur scientifique que si elle organise un vaste ensemble de lois acquises inductivement, à la suite d'une longue exploration des phénomènes. Inductive aux XVIIe et XVIIIe siècles, ayant ouvert au XIXe l'ère des grandes théories déductives, la physique est aujourd'hui parvenue au point où le traitement axiomatique lui devient assez largement applicable.

Ce ne sont pas toujours ses parties les plus anciennes qui ont le plus bénéficié de ce traitement. Certains traits des théories nouvelles — lesquelles, bien entendu, prennent appui sur tout l'acquis antérieur, même quand elles le corrigent — les y prédestinaient, et pas seulement le fait qu'elles sont nées en la saison même où fleurissait l'axiomatique. Premièrement, leur caractère hautement abstrait et formel, qui résulte inévitablement, entre autres raisons, de ce qu'elles ont cessé d'être à l'échelle de notre intuition. Une physique de l'immense et une physique de l'infime déconcertent notre pouvoir de représentation concrète. La *courbure* de l'espace-temps, le *spin* de l'électron, n'ont plus qu'une valeur très faiblement analogique ; encore cette lointaine allusion à l'image s'évanouit-elle totalement avec le symbolisme mathématique, qui seul donne aux théories leur expression exacte. De plus, certaines particularités essentielles à la nouvelle physique favorisent ou même imposent l'usage de la

méthode axiomatique. Comme l'explique J.-L. Destouches, « une physique dans laquelle toutes les mesures simultanées ne sont pas possibles ne peut être une physique des propriétés intrinsèques et doit se borner à être une physique de relations » (1). Une telle physique est nécessairement *structurale*. Elle commande expressément la subordination des termes aux relations, si caractéristique de l'ordonnance axiomatique.

Si l'usage n'est pas encore très répandu d'exposer axiomatiquement le contenu de la physique classique, ce n'est pas que la chose présente des difficultés spéciales, du moins pour les parties déjà systématisées. L'axiomatique est l'achèvement de la théorie déductive, ce qui veut dire aussi bien que toute mise en forme déductive engage déjà dans la voie de l'axiomatique. L'habitude de doubler le langage verbal par le symbolisme mathématique a depuis longtemps accoutumé les physiciens à distinguer, non tant entre théories à images et théories abstraites, qu'entre deux aspects, l'un concret, l'autre symbolique, d'une même théorie : les images n'étant guère, selon la comparaison de Poincaré, que des vêtements soumis au caprice de la mode, tandis que la vraie théorie, celle qui demeure, c'est le système d'équations, c'est-à-dire de rapports. De même, ils n'ont pas manqué de remarquer les similitudes formelles entre des équations ou des systèmes d'équations appartenant à des chapitres de physique concrètement différents, et régissant, par exemple, les uns des phénomènes mécaniques, les autres des phénomènes électro-magnétiques : les isomorphismes leur sont donc familiers. Mais déjà dans l'organisation conceptuelle que suppose l'établissement

(1) *Essai sur la forme générale des théories physiques*, p. 102.

des lois, le travail d'abstraction prépare et appelle les axiomatiques ultérieures. Si la physique est une science du concret en ce sens qu'elle porte sur le réel, du moins les termes entre lesquels elle établit ces relations qu'énoncent les lois sont-ils tout autres choses que des objets concrets. La masse, la force, le potentiel, la résistance, sont des entités abstraites ; suggérées assurément, comme leur nom le rappelle, par des images, mais dont le sens proprement scientifique est fixé uniquement par les relations qu'elles soutiennent entre elles et avec d'autres de même nature (1). Les notions intuitives ont servi, à l'origine, pour établir les lois, mais une fois construit le réseau des lois, la perspective est renversée : c'est l'ensemble des principes de la mécanique classique, de la thermo-dynamique, de l'optique, qui donne, des notions fondamentales de chacune de ces théories, une « définition déguisée ». Pour écarter définitivement ces significations intuitives adventices et importunes, pour exposer dans sa pureté intellectuelle le système des relations, nulle méthode ne saurait être plus efficace que la méthode axiomatique.

§ 26. Limites de la méthode axiomatique. — Les avantages de cette méthode ne doivent pas, cependant, en dissimuler les limites. N'oublions pas, d'abord, qu'elle ne représente qu'une des faces de la science, et que même le logicien et le mathématicien ne se désintéressent nullement de la vérité matérielle de leurs propositions. L'arithméticien peut bien feindre de la négliger : il n'en continue pas moins d'accueillir, quitte à les situer à

(1) Cf. J. Ullmo, Physique et axiomatique, *Rev. de métaph.*, 1949, p. 126-138.

un niveau inférieur, nombre de « théorèmes empiriques » qui sont de vraies lois inductives. Mais là même où l'on procède axiomatiquement, on ne saurait pousser la méthode jusqu'au terme où elle vise. Elle se propose de pourchasser l'intuition pour lui substituer, non pas même le raisonnement, mais un calcul, un maniement réglé et aveugle de symboles. En réalité, le formalisme ne peut fonctionner sans s'alimenter, de part et d'autre, à l'intuition.

D'abord à l'intuition concrète qui le soutient. Ce n'est que dans les livres qu'une axiomatique commence avec les axiomes : dans l'esprit de l'axiomaticien, elle y aboutit. Elle présuppose la déduction matérielle qu'elle met en forme, et celle-ci à son tour a exigé un long travail inductif préalable pour réunir les matériaux qu'elle organise. Sur ces bases, le vrai travail de l'axiomaticien, c'est de découvrir les axiomes : non pas, donc, de déduire les conséquences de principes donnés, mais au contraire, donné un ensemble de propositions, de trouver un système minimal de principes d'où elles se puissent déduire. A l'analyse inductive qui, des faits, remonte aux lois, succède l'analyse axiomatique qui, poursuivant l'œuvre de systématisation déductive, remonte des lois aux axiomes. Une fois ceux-ci traduits en symboles, avec leurs règles de fonctionnement, le formaliste pourra oublier les significations intuitives initiales. Elles n'en ont pas moins commandé le dessin de sa construction et seules, maintenant encore, elles en font comprendre les lignes maîtresses et les contours et elles en assurent l'unité : unité organique, non simple juxtaposition accidentelle d'axiomes. Le défaut d'une présentation axiomatique abrupte, quand elle touche des esprits non préparés, est précisément dans cette impression irrésistible d'arbitraire et de vacuité. Une axiomatique n'offre guère d'intérêt pour qui n'a pas antérieurement assimilé la masse de connaissances concrètes qu'elle ordonne en les schématisant. On ne construit pas une axiomatique par simple jeu, et les instruments intellectuels sont faits, eux aussi, pour qu'on s'en serve. Même le pur théoricien qui laisse à d'autres l'usage de l'outil n'en est pas moins astreint, pour sa part, à la considération d'un modèle : à savoir, le modèle symbolique lui-même.

Une autre limite est tracée à l'usage de la méthode axiomatique par un théorème paradoxal de Skolem. A tout système qui dépasse un certain niveau assez élémentaire et qui comporte un modèle dans un domaine quelconque, il est possible d'assigner aussi un modèle dans le domaine des nombres naturels. Or, l'ensemble des nombres naturels constitue un infini dénombrable, ce qui est la plus faible puissance des ensembles infinis (1). Il résulte donc de ce théorème que le traitement axiomatique fait évanouir, en quelque sorte, toutes les puissances supérieures. Le continu, par exemple, ne peut pas être conçù axiomatiquement dans sa spécificité structurale, puisque toute axiomatique qu'on en donnera comportera un modèle dénombrable. Des résultats obtenus ultérieurement par von Neumann, montrant que la puissance

(1) Rappelons que deux ensembles sont dits avoir même *puissance* lorsqu'on peut établir entre leurs éléments une correspondance bi-univoque (c'est-à-dire qu'à tout élément de l'un correspond un et un seul élément de l'autre, et réciproquement) ; que, pour des ensembles finis, avoir même puissance se ramène à avoir même *nombre* d'éléments ; que, pour les ensembles infinis, la plus faible puissance est celle du *dénombrable* (la suite indéfinie des nombres naturels) ; que la puissance du *continu* (celle, par exemple, des points d'une ligne, ou de l'ensemble des nombres réels) est supérieure à celle du dénombrable ; enfin, qu'on peut toujours construire un ensemble dont la puissance surpasse celle d'un ensemble quelconque.

d'un ensemble est relative à l'axiomatique utilisée, vont dans le même sens. C'était un avantage de la méthode axiomatique que de réunir, par l'identité de leur structure, une pluralité de systèmes isomorphes. Si, maintenant, les systèmes qu'elle réunit peuvent n'être pas isomorphes, c'est donc qu'elle laisse échapper certaines particularités des structures et qu'elle ne suffit plus à différencier celles-ci. Pour les distinguer, un recours à l'intuition sera nécessaire.

Si l'intuition concrète la borde par en bas, l'axiomatique demeure également en contact, par le haut, avec une intuition intellectuelle qu'elle peut bien repousser toujours plus loin, mais non point supprimer. De la théorie l'intuition se réfugie dans la métathéorie, puis de celle-ci, réduite à son tour à un système formel, dans la méta-métathéorie, et ainsi sans fin : toujours le maniement du symbolisme exige un survol de l'esprit. Les théorèmes de Gödel ont rendu la chose manifeste aux formalistes eux-mêmes. Ils jouent ici un rôle qu'on a pu comparer à celui des relations d'incertitude de Heisenberg en physique quantique : de même que l'intervention de l'activité expérimentale dans le contenu de l'observation ne se laisse pas indéfiniment exténuer, ainsi en va-t-il pour l'intervention de l'activité mentale dans les axiomatiques symbolisées et formalisées. Qu'on s'en réjouisse ou qu'on s'en afflige, il n'est pas possible d'éliminer le sujet. D'où la réaction de l'intuitionnisme : « Nous n'acceptons pas que le chemin de la science mène à l'élimination de l'esprit (1). » Même avec des systèmes assez rudimentaires pour que n'y jouent pas encore les

(1) A. Heyting, dans F. Gonseth, *Philosophie mathématique*, 1939, p. 75.

interdictions de Gödel, il est clair que l'aperception d'une correspondance analogique entre l'interprétation objective et l'interprétation syntaxique des mêmes formules requiert, tout comme l'intelligence d'un calembour, une initiative spirituelle, et que, plus généralement, une certaine constellation de signes, noir sur blanc, ne deviendra, par exemple, une démonstration de non-contradiction que pour un esprit qui sache la lire comme telle. Le bienfait de la méthode axiomatique n'est pas d'exclure l'intuition, mais de la contenir et de la refouler sur le terrain étroit où elle est irremplaçable. Il y a avantage à substituer l'outil à l'organe, ensuite la machine à l'outil, puis à doter la machine d'appareils d'auto-régulation : si perfectionnée qu'on l'imagine, son simple fonctionnement — pour ne pas parler de sa construction ni de son utilisation — demandera toujours un contrôle humain, ne dispensera jamais de quelques interventions extérieures, fussent-elles de plus en plus minimes et espacées. Tout comme une machine, un mécanisme intellectuel ne serait vraiment sûr que si l'on pouvait avoir la certitide absolue qu'il est sans défauts, qu'il ne risque ni panne ni affolement, qu'en aucune circonstance ne surgira une ambiguïté quelconque sur la façon d'appliquer les règles, ou que jamais nous ne nous trouverons lancés dans une alternance indéfinie d'affirmations et de négations rappelant les antinomies cantoriennes. Sans doute est-il plus juste de demander à l'intuition et au formalisme de se contrôler mutuellement : le formalisme garantissant contre les erreurs d'une intuition intempérante, mais à la condition d'être lui-même soumis à la surveillance d'une intuition réduite.

Au reste, personne n'a sérieusement contesté le rôle que conserve l'intuition dans la découverte. Quelle que

soit la fécondité d'une méthode, son office est surtout de consolidation et, si l'on veut, de prolongement, mais sur un terrain préalablement fixé. Elle met en ordre l'acquis et, ce faisant, comble les lacunes et exploite les percées, mais elle n'inaugure rien d'essentiellement neuf. Les découvertes bouleversantes sont l'œuvre du génie qui bouscule les méthodes. Trouver, prouver : l'un n'est pas moins indispensable que l'autre à la science, qui requiert l'esprit d'aventure autant que l'esprit de rigueur. De ce point de vue encore, intuition et formalisme se complètent, selon la diversité des esprits et les oscillations de l'histoire. Un auteur peu suspect de tiédeur pour l'axiomatique en convient expressément : « Aux périodes d'expansion, lorsque des notions nouvelles sont introduites, il est souvent fort difficile de délimiter exactement les conditions de leur emploi, et pour tout dire, on ne peut raisonnablement le faire qu'une fois acquise une assez longue pratique de ces notions, ce qui nécessite une période de défrichement plus ou moins étendue, pendant laquelle dominent l'incertitude et la controverse. Passé l'âge héroïque des pionniers, la génération suivante peut alors codifier leur œuvre, en élaguer le superflu, en asseoir les bases, en un mot remettre l'édifice en ordre : à ce moment règne de nouveau sans partage la méthode axiomatique, jusqu'au prochain bouleversement qu'apportera quelque idée nouvelle (1). »

(1) J. Dieudonné, *L'axiomatique dans les mathématiques modernes*, recueil cité, p. 47-48.

CHAPITRE V

PORTÉE PHILOSOPHIQUE DE L'AXIOMATIQUE

§ 27. PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES. — La constitution et le développement de la méthode axiomatique n'intéressent pas seulement le travail scientifique, ils se projettent aussi sur des problèmes philosophiques dont la portée va s'élargissant : philosophie des mathématiques, philosophie de la science, philosophie de la connaissance.

En premier lieu, l'axiomatique ouvre l'une des voies possibles pour résoudre le problème qui a dominé, depuis le début de notre siècle, toute la philosophie mathématique, celui du fondement même de cette science. Ce problème qui n'avait guère, jusque-là, préoccupé les mathématiciens, s'est brusquement imposé à eux par la crise de la théorie des ensembles. Élaborée par G. Cantor pendant le dernier quart du XIXe siècle, la théorie des ensembles, après bien des résistances, avait fini par apparaître, aux environs de 1900, comme la base de tout l'édifice mathématique : l'arithmétique des nombres finis, avec laquelle on venait de reconstruire les autres parties des mathématiques, se laissait en effet construire à son

tour comme un cas spécial, particulièrement simple et intuitif, de la théorie des ensembles, celui des ensembles dénombrables. Or, c'est précisément à ce moment que surgissent, à l'intérieur de la théorie, des « antinomies » ou « paradoxes », c'est-à-dire des couples de théorèmes contradictoires. L'ensemble de tous les ensembles-qui-ne-se-contiennent-pas-eux-mêmes-comme-éléments se contient-il lui-même comme élément ? On se convaincra facilement qu'une réponse affirmative et une réponse négative à cette même question sont également justifiables. Pareils embarras présentent ici une gravité exceptionnelle : pour une théorie qui a cessé de s'appuyer sur des notions et des vérités intuitives et qui n'a plus, donc, d'autres garantie de sa validité que la cohérence formelle, la moindre fissure suffit à tout compromettre ; sa logique a l'obligation absolue d'être infaillible.

Dès le début, les recherches pour une solution se sont engagées dans trois directions. L' « empirisme » de Borel et Lebesgue, bientôt prolongé et renforcé par l' « intuitionnisme » de Brouwer, impute les difficultés au maniement aveugle de l'instrument logique : celui-ci ne nous offre plus de garantie dès que nous sortons des domaines où nous l'avons longuement éprouvé, et c'est pourquoi son extension au domaine du transfini est décevante. C'est l'intuition qui juge, en dernier ressort, de la validité même des règles logiques ; de sorte que si on lui donne toujours le pas sur le discours, on ne s'exposera plus à des antinomies. On les évite en effet, mais à quel prix ? En suivant ces principes, on se trouve progressivement amené à condamner des parties considérables, non seulement de la théorie des ensembles, mais de mainte théorie mathématique ancienne et consacrée. Beaucoup jugent de tels sacrifices excessifs, et le remède trop énergique.

Si l'on veut conserver la totalité des mathématiques classiques avec, en outre, l'essentiel de la théorie cantorienne, et demeurer en même temps fidèle à l'inspiration de cette dernière, on essaiera alors, comme l'a fait Russell, la voie du « logicisme ». D'une part, on maintiendra le propos de construire les mathématiques à partir des seules notions et lois de la logique. Mais puisque celles-ci ont conduit à des antinomies qu'il s'agit d'interdire, on renforcera d'autre part les règles de la logique de manière telle qu'elles ne permettent plus d'y aboutir. Malheureusement, il est difficile d'accorder les deux choses, parce que, pour donner aux règles de logique le degré exact de sévérité qui convient pour exclure les antinomies et elles seules, on se voit contraint de poser certains axiomes dont le caractère extra-logique n'est guère contestable.

Reste un troisième chemin, par lequel Zermelo (1) essaiera de sortir d'embarras : la reconstruction axiomatique. Cette solution diffère de la précédente en ce que, si elle exige toujours des axiomes qu'ils ne tolèrent pas la production des antinomies, elle ne leur impose plus d'être empruntés au seul matériel logique. Cependant, les conditions pour l'établissement d'une telle axiomatique sont tout autres que pour les axiomatiques de Peano et de Hilbert. Pour celles-ci, on allait seulement des conséquences aux principes : on partait de théories bien éprouvées comme l'arithmétique et la géométrie classiques, dont personne ne mettait sérieusement en doute la consistance, et du moment que les principes qu'on leur assignait leur étaient exactement adaptés, il

(1) L'axiomatisation des ensembles sera ultérieurement reprise et développée par divers auteurs, notamment Fraenkel, von Neumann, Bernays.

n'y avait rien de plus à leur demander ; il n'était pas indispensable qu'ils fussent évidents et certains par eux-mêmes, on était sûr d'avance qu'ils n'engageaient pas dans des contradictions. Ici au contraire, l'existence des antinomies montre qu'on travaille dans une zone d'insécurité. Même si les axiomes sont choisis de manière à éviter les antinomies connues, qu'est-ce qui garantit qu'ils n'en feront pas surgir ailleurs d'autres analogues ? Il ne suffit donc plus de produire un système d'axiomes tel qu'il permette de démontrer exactement la partie acceptable de la théorie des ensembles, il faut que les axiomes inspirent eux-mêmes une confiance absolue : à la priorité logique ils doivent unir l'évidence psychologique, être fondements aussi bien que principes. Or, l'un des axiomes de Zermelo était loin de satisfaire à cette condition ; ou, plus exactement, la question de savoir s'il y satisfaisait divisait les mathématiciens en deux camps. Évident pour les uns, l'axiome dit « du choix » n'était pour les autres qu'une formule creuse, un assemblage de mots grammaticalement correct mais vide de sens. Et les propositions équivalentes qu'on aurait pu songer à lui substituer, comme celle relative à la possibilité du « bon ordre », souffraient du même défaut. L'axiomatique naïve, confiante dans le sentiment d'évidence intellectuelle pour justifier le choix des axiomes, se trouvait bloquée dans une impasse.

L'un des principaux objectifs de la métamathématique de Hilbert est de l'en faire sortir, en suppléant par le raisonnement à l'intuition défaillante. La formalisation de l'axiomatique doit en effet permettre d'établir par voie démonstrative, sans avoir besoin d'en appeler au sentiment subjectif de l'évidence, si un système d'axiomes est ou non consistant. Si une telle démonstration peut être donnée favorablement pour une axiomatique de la théorie des ensembles, le problème du fondement est résolu. Il devrait l'être même aux yeux d'un intuitionniste — pour qui la non-contradiction est condition nécessaire mais non suffisante de l'existence mathématique — pourvu que la démonstration satisfasse à l'exigence de construction en un nombre fini d'étapes, ce qui est, selon lui, le vrai critère. C'est pourquoi Hilbert, soucieux de ne pas renouveler des controverses stériles, avait imposé aux procédés de démonstration des conditions très sévères. Les espoirs que les « formalistes » avaient mis en cette méthode ont été, on s'en souvient, partiellement déçus. Les théorèmes de Gödel, notamment, ont montré que la non-contradiction des systèmes en question ne pouvait être prouvée par une formalisation qui demeurât intérieure à ces systèmes. Le paradoxe de Skolem, de son côté, oppose à l'axiomatisation de la théorie des ensembles une difficulté essentielle, puisqu'il en résulte que le traitement axiomatique y fait évanouir la distinction des diverses puissances. Cette dernière restriction, toutefois, ne concerne directement que la théorie des ensembles. D'autre part, le cadre dans lequel Hilbert s'était volontairement enfermé tolérait d'être quelque peu élargi, sans dépasser pour cela les bornes que s'assigne l'intuitionnisme, de sorte que les interdictions de Gödel s'en trouvent atténuées. C'est dans ces conditions que Gentzen, en 1937, parvint à démontrer la non-contradiction de la théorie des nombres, en ne faisant appel qu'à un seul principe extérieur à la théorie, et en montrant que ce principe n'excédait pas les moyens que s'accorde l'intuitionnisme. Résultat important, puisque la non-contradiction de beaucoup de théories s'appuyait sur celle, jusque-là simplement postulée, de l'arithmétique.

Si le formalisme axiomatique n'a pas définitivement résolu le problème du fondement des mathématiques, il reste que, tant par lui-même que par les réactions qu'il a suscitées, il l'a fait considérablement avancer. Il a, d'autre part, fortement déteint sur les doctrines qui lui étaient initialement opposées. Les différences entre logicisme et axiomatisme se sont aujourd'hui presque évanouies, au point que les deux tendances se composent chez certains auteurs comme Quine. La multiplicité des logiques, traitées désormais selon les méthodes de l'axiomatique formalisée, ne permet plus guère de donner à leurs notions de base un sens absolu ; et la question de savoir où finit la logique et où commencent les mathématiques a perdu une bonne partie de son sens. Les diversités du début du siècle se résument aujourd'hui en une grande alternative, selon qu'on accorde la priorité à la logique ou à l'intuition. Encore les deux partis se sont-ils suffisamment rapprochés pour pouvoir maintenant se comprendre et travailler en commun. En transportant les problèmes sur le plan des constructions symboliques, le formalisme hilbertien parle un langage accessible à l'intuitionniste, tandis que ce dernier est décidément entré, à la suite de Heyting (1930), dans la voie de l'axiomatique formelle. On peut refuser le formalisme axiomatique, mais l'axiomatisation et la formalisation sont aujourd'hui devenues, comme disait déjà Cavaillès, des uniformes obligatoires (1).

(1) *Ouv. cit.*, p. 182. — Mentionnons que le formalisme est également rejeté par les tenants du matérialisme dialectique, qui y voient une manifestation de l' « idéalisme bourgeois ». Jusqu'à présent, cependant, il n'apparaît pas que cette opposition d'ordre philosophique ait déterminé une orientation originale du travail mathématique, comme c'est le cas pour l'intuitionnisme.

§ 28. PHILOSOPHIE DE LA SCIENCE. — Avant même que le problème du fondement s'imposât à l'attention des mathématiciens, l'axiomatique, née d'une réflexion sur la méthode des géomètres, avait aussitôt jeté une vive lumière sur le paradoxe de cette science, que sa situation met à la charnière de l'intelligible et du sensible. Bien que les théorèmes de l'arithmétique et de la logique s'appliquent au réel, il ne semblait pas impossible de regarder ces sciences comme purement rationnelles, si effacé est l'appel qu'elles font à l'intuition sensible. Bien que les lois de la physique s'expriment dans le langage mathématique, il demeurait apparemment plausible de faire dériver de l'expérience toute leur substance, le symbolisme mathématique n'étant regardé que comme un vêtement commode. D'où la distinction classique entre deux groupes de sciences, rationnelles et expérimentales : les unes qui, selon le mot de Goblot, n'ont pas besoin pour être vraies que leurs objets soient réels, et les autres, pourrait-on dire, dont les objets n'ont pas besoin, pour exister, d'être intelligibles. Mais de quel côté situer, alors, la géométrie ? L'intervention manifeste de l'intuition spatiale interdisait de réduire son contenu à un système de propositions analytiques ; ses vérités, d'autre part, s'imposaient si bien à l'esprit qu'on ne pouvait guère les rapporter aux simples contingences de l'expérience. L'idée kantienne de la « synthèse *a priori* », noyau de toute la philosophie critique, a été, on le sait, directement inspirée par cette difficulté. Or, l'axiomatique invite à la résoudre tout autrement. Si la géométrie classique paraissait à la fois pure et intuitive, c'est qu'elle formait un mixte, réunissant en une science apparemment unique deux disciplines distinctes, qui sont maintenant nettement dissociées : une géométrie pure, représentée par la théorie

axiomatique, où le sens intuitif des termes et des propositions est délibérément écarté, et dont la vérité se mesure à la seule cohérence logique, sans appel à l'expérience ; et une géométrie appliquée, intuitive, où la forme démonstrative n'est qu'un accessoire et dont les théorèmes sont, en réalité, des lois physiques. La seconde a servi à constituer la première, mais celle-ci en est maintenant devenue indépendante, elle tient debout par ses seules forces, et si elle se réfère éventuellement à l'autre, c'est seulement comme à l'un de ses « modèles » possibles. Toutes deux peuvent, il est vrai, être exposées simultanément en un même discours, d'où la confusion ; mais cet unique langage se prête à deux lectures différentes. A la question : comment la raison peut-elle, sans le secours de l'expérience, nous faire connaître des propriétés du réel ? on répondra désormais comme fait Einstein au début de son opuscule sur *La géométrie et l'expérience* : « La parfaite clarté sur ce point me semble avoir été mise à la portée de chacun, grâce au courant que les mathématiciens nomment l'*axiomatique*. Le progrès réalisé par l'axiomatique consiste en une claire et nette séparation de l'intuitif et du logique : d'après l'axiomatique, seuls les faits logiques et formels forment l'objet de la science mathématique, mais non l'élément intuitif qui peut s'y rattacher. »

Seulement, il faut veiller à interpréter correctement ce dédoublement de la géométrie quand, au lieu de la considérer seule, on la replace dans le système des sciences. Doit-on entendre que le caractère ambigu de la géométrie classique résultait de sa situation médiane, que les deux tronçons en lesquels la méthode axiomatique vient de la scinder doivent simplement rejoindre, l'un le groupe des sciences rationnelles ou déductives, l'autre celui des sciences expérimentales ou inductives, et qu'ainsi se trouve renforcée la vieille dichotomie qui mettait d'un côté les sciences logico-mathématiques, de l'autre les sciences physiques, naturelles et morales, l'endroit exact où doit se faire la coupure étant maintenant précisé ? Pareille interprétation s'accorderait avec la conception dualiste de la science que professe aujourd'hui l'empirisme logique. Celui-ci établit entre deux sortes de sciences une séparation plus radicale encore qu'on ne l'avait fait jusqu'ici. Il met d'un côté les sciences formelles — logique et mathématiques — qu'il considère sous la forme épurée que leur donne la présentation axiomatique : entièrement vidées de toute signification extérieure, elles ne nous apprennent strictement rien sur le réel ; leurs énoncés, purement analytiques, concernent seulement les transformations du discours. Et d'autre part toutes les sciences du réel, pour l'expression desquelles nous utilisons, il est vrai, le langage logico-mathématique, mais qui pourraient, en principe, s'en passer sans rien perdre de leur contenu, celui-ci étant entièrement fourni par l'expérience.

Si l'on invoquait, cependant, les enseignements de l'axiomatique à l'appui de cette thèse, on oublierait un fait essentiel. Loin de se cantonner dans le domaine géométrique initial, l'axiomatique s'est en effet rapidement étendue de part et d'autre : vers l'arithmétique et la logique, vers la mécanique et la physique. Elle intéresse aujourd'hui l'ensemble des sciences. Dès lors, ce n'est pas à l'intérieur de la seule géométrie que passe la coupure entre le rationnel et l'expérimental, le logique et l'intuitif : le dédoublement axiomatique joue dans toutes les sciences ou, en tout cas, dans toutes celles qui sont suffisamment avancées pour se prêter à l'organisation déductive. Qu'on mette la mécanique ou l'optique sous la forme d'une axiomatique symbolisée : le lecteur a cessé d'être en présence d'une science du réel, il se trouve devant un système formel, vidé de tout contenu empirique, où « l'on ne sait plus de quoi on parle ni si ce qu'on dit est vrai ». Inversement, qu'en face d'une axiomatique abstraite il sache assigner aux axiomes une interprétation valable dans un certain domaine du réel, soudain tout s'illumine : les symboles prennent un sens concret, les formules une vérité empirique. Il n'est même pas nécessaire pour cela que l'application tombe dans ce qu'on nomme habituellement le monde physique : une traduction arithmétique ou logique fait aussi bien l'affaire. Car la notion usuelle du nombre, par exemple, abstraite quand on la compare au tas de billes, devient une interprétation concrète par rapport à l'x qui figure dans les axiomes, et de même pour les notions logiques de négation, d'implication, d'appartenance à une classe, etc.

Dans ces conditions, ce n'est pas transversalement, au niveau de la géométrie, que joue le dédoublement axiomatique. Il divise longitudinalement toute l'échelle des sciences, depuis la logique jusqu'aux sciences morales. La seule différence, et elle n'est que de degré, c'est que les premières prennent plus aisément la forme axiomatique, de sorte qu'on y reconnaît mieux la possibilité d'une lecture abstraite. Mais qu'elles-mêmes se prêtent, comme l'a révélé l'axiomatique, à une double lecture, montre bien qu'elles ne se distinguent pas essentiellement des sciences empiriques, et qu'elles sont déjà, à leur manière, des sciences du réel. Il n'y a pas des sciences abstraites et des sciences concrètes, des sciences rationnelles et des sciences empiriques. Il y a, premièrement, entre les sciences, des degrés divers d'abstraction et de rationalité, qui permettent de les ordonner en série. Il y a, ensuite, pour chacune d'elles, possibilité d'une double lecture : abstraite, rationnelle et formelle, ou concrète, empirique et matérielle. On peut, par convention de langage, employer le mot de *logique* ou celui de *mathématique* pour désigner la lecture abstraite d'une théorie axiomatisée quelconque. Mais alors, le sens de ces mots subit lui aussi le dédoublement axiomatique et il faudra se garder de l'équivoque qui menace. Quel que soit le domaine — arithmétique, optique, etc. — sur lequel on aura édifié une axiomatique, celle-ci sera une pure construction *logique*, en ce sens qu'elle sera devenue vide et purement formelle ; mais elle peut aussi, en un autre sens, représenter une théorie *logique*, aussi bien qu'une théorie arithmétique ou optique, selon l'interprétation qu'on donnera de ses symboles, et si l'ensemble de ses axiomes se laisse traduire en propositions de logique. De même, le mot de *mathématique* prend désormais un sens ambigu, comme on peut le voir dans le texte d'Einstein cité plus haut. Il peut, parce que c'est la mathématique qui a donné l'exemple, désigner une théorie réduite à sa forme abstraite : il devient alors synonyme de *logique* entendu dans sa première acception. Ainsi faut-il l'entendre, par exemple, dans les boutades de Russell et de Poincaré (§ 10). Mais ce sens relativement nouveau s'ajoute, sans l'effacer, au sens plus traditionnel, selon lequel on appelle de ce nom un groupe particulier de sciences, celles qui traitent des nombres, des figures, etc. Loin de s'opposer, par des caractères antithétiques, à toutes les autres sciences prises en bloc, les mathématiques ainsi entendues voisinent avec la logique d'un côté, avec les sciences physiques de l'autre, les frontières demeurant quelque peu indécises : car les ensembles

du mathématicien ressemblent fort aux classes du logicien, la cinématique fait la jonction entre géométrie et dynamique, et l'on hésite si la probabilité se doit attribuer au mathématicien, au logicien ou au physicien. Malgré l'ambiguïté qui subsiste dans le langage, la dissociation se fait ainsi, dans la pensée, entre les deux éléments qui demeuraient enchevêtrés dans la notion classique de la mathématique, caractérisée à la fois par son objet et par sa méthode, science de la quantité et science démonstrative.

La vieille distinction entre science rationnelle et science empirique, lieu commun de l'épistémologie depuis l'époque de Bacon, mérite sans doute d'être conservée, mais à la condition qu'on cesse d'y confondre deux acceptions qui ne se recouvrent que partiellement, et que l'axiomatique permet de dégager clairement l'une de l'autre. Ou bien on l'entend comme une nette dichotomie, et alors elle ne divise pas les sciences en deux classes, elle marque une dualité intérieure à chaque science. Ou bien l'on veut ainsi distribuer les diverses sciences, mais dans ce cas la séparation est indécise et relative, comme celle d'une assemblée d'hommes qu'on répartirait en grands et petits. L'opposition des sciences formelles et des sciences du réel n'est justifiable que dans la mesure où, superposant ces deux distinctions, on appelle formelles celles qui, ayant atteint les premières un haut degré d'abstraction, se prêtent par excellence à un traitement axiomatique, et sciences du réel celles qui, moins avancées, se laissent difficilement détacher des interprétations concrètes. Ce faisant, on caractérise moins deux *espèces* de sciences que deux *types* idéaux qui se réalisent inégalement dans les diverses sciences ou, mieux encore, deux *pôles* de la pensée scientifique.

§ 29. PHILOSOPHIE DE LA CONNAISSANCE. — L'opposition de la raison et de l'expérience n'est que l'une des multiples formules qui, sans concorder en tous points, expriment diversement mais avec une parenté manifeste ce que Whewell appelait « l'antithèse fondamentale de la philosophie » : les idées et les faits, la pensée et les choses, la connaissance et l'être, l'intelligible et le sensible, l'abstrait et le concret, le construit et le donné, le conçu et le perçu, l'*a priori* et l'*a posteriori*, etc. En invitant à s'interroger sur les rapports du logique et de l'intuitif, les recherches axiomatiques apportent ainsi leur contribution à un problème qui, à travers la géométrie et le système entier des sciences, rejoint un thème majeur de la réflexion philosophique. La méthode axiomatique n'est pas seulement un procédé technique des mathématiciens ; on peut y trouver une illustration, particulièrement suggestive, de la manière dont procède la pensée dans la connaissance. En lui appliquant les notions dont elle fait elle-même usage, on dirait qu'elle nous apporte, des opérations cognitives, un modèle concret, sur lequel on peut essayer une lecture abstraite (1).

On y voit d'abord qu'aucun sens absolu ne doit être donné aux deux termes de l'antithèse, dont la limite se déplace sans cesse. La chose, certes, n'est pas nouvelle, et sur tout le front des sciences on n'a pas manqué de remarquer ce mouvement de l'esprit qui lui fait traiter bientôt ses propres créations comme un donné, à dépasser en une abstraction supérieure. Le concret, disait Langevin, c'est de l'abstrait rendu familier par l'usage ; et aujourd'hui les jeunes mathématiciens objectent à « l'empi-

(1) Cf. F. GONSETH, *Les mathématiques et la réalité, essai sur la méthode axiomatique*. Dans ce qui suit, nous nous inspirons librement, mais très largement, de cet excellent ouvrage.

risme » d'un Borel que le transfini, maintenant qu'ils sont habitués à le manier, est devenu pour eux une notion intuitive, si naturelle qu'ils vont jusqu'à la dire « innée » (1). Mais l'axiomatique met l'idée dans un jour cru. Avec elle, le cas de la géométrie classique devient particulièrement instructif. Pour un axiomaticien, elle glisse du côté de l'intuitif, tandis que, par rapport aux connaissances empiriques qui la préparaient, elle apparaissait sûrement aux Grecs, comme elle apparaît aujourd'hui encore aux enfants à qui on l'enseigne, comme une difficile création de la raison. Sur elle, l'histoire nous fait connaître deux *mutations* dont l'analogie a été bien soulignée par F. Gonseth. Deux fois l'esprit a franchi un « seuil d'abstraction », dépassant le donné par un acte irremplaçable d'initiative intellectuelle : il faut apprendre à lire la droite géométrique dans le fil tendu, comme plus tard à lire la droite axiomatique dans la droite géométrique. C'est pourquoi il n'est point paradoxal de voir dans Euclide, comme on fait quelquefois, un vrai axiomaticien. De même, toutes les notions de la physique classique, telles que la masse, le potentiel, l'entropie, s'appuient sur un donné sensible qu'elles schématisent, mais servent à leur tour de soutien intuitif pour une axiomatique abstraite.

Les deux termes de l'antithèse ne se laissent donc penser que dans leur relation. Seul a un sens le couple, avec sa tension caractéristique entre deux pôles opposés. Le concret ne se définit que comme une vection. De la géométrie de Hilbert on peut remonter à celle d'Euclide, de celle-ci à la géométrie des Orientaux, de cette dernière

(1) P. LANGEVIN, *Les notions de corpuscule et d'atome*, p. 45 ; J. DIEUDONNÉ, *L'axiomatique...*, *art. cit.*, p. 50 ; A. DENJOY, *L'innéité du transfini*, dans LE LIONNAIS, *ouv. cit.*, p. 188.

à d'autres formes plus primitives : on va ainsi en direction du concret, on n'atteint jamais un concret pur, privé de toute conceptualisation, comme celui que l'empirisme feint d'étaler devant l'esprit. Il n'y a pas plus de phénomène premier que de sensation passive : les enseignements de la critique des sciences concordent ici avec ceux de la psychologie. Ouverte ainsi par le bas, la connaissance est également ouverte par le haut. Un abstrait n'est dernier que provisoirement. Et il n'est jamais pensé seul, jamais présenté à l'esprit comme sur un tableau. Il n'apparaît que réalisé dans un modèle, fût-ce seulement le modèle symbolique. Pas plus que de contenu informe, nous ne connaissons de forme pure. Il peut y avoir un vide de pensée, il ne saurait y avoir de pensée vide. Pour penser effectivement le *rien*, il faut le représenter par *quelque chose* : une croix, le chiffre zéro, la mention « néant ». Pour penser une structure abstraite, il faut lui donner, sur le papier, une forme concrète. La pensée transcende le système de signes, elle doit le survoler pour le saisir comme tel, mais sans lui, à défaut d'un contact direct avec les choses, elle se perd dans l'indéterminé.

Cette tension bipolaire qui est la condition de toute connaissance apparaît avec une netteté particulière dans la pensée axiomatique. Les notions un peu vagues de la théorie de la connaissance — concept et intuition, forme et contenu — s'y précisent dans la corrélation qu'elle établit entre la structure abstraite et la réalisation concrète, entre le schéma et le modèle. On y saisit sur le vif le mouvement de navette qui porte l'esprit de l'un à l'autre, les éclairant mutuellement par leur mise en correspondance. Les physiciens, nous le rappelions plus haut, sont souvent divisés sur la valeur respective des

théories abstraites et des théories à images. Et il est vrai que les génies sont divers, que tel excelle à lire dans le concret l'abstrait, tel autre à interpréter l'abstrait par le concret. Mais de même qu'une différence de température est nécessaire pour que fonctionne une machine thermique, de même faut-il que l'esprit, pour comprendre, dispose d'une dénivellation qui lui permette de circuler entre deux plans, de s'élever du fait à l'idée et de redescendre de l'idée au fait. Dégager la règle, l'illustrer d'un exemple : de ce double mouvement en quoi se résume toute connaissance, l'axiomatique nous apporte précisément l'un des exemples sur lesquels se laisse le mieux apercevoir la règle.

On voit quelles attitudes philosophiques l'axiomatique contrarie, quelles elle favorise. Elle répugne à un dogmatisme de la synthèse, au rêve d'un point de départ absolu qui assurerait à la déduction une sécurité définitive. C'est à la totalité de la science qu'elle étend maintenant la forme hypothético-déductive. Comme la méthode expérimentale avait discrédité l'espoir cartésien d'une physique démonstrative, aujourd'hui le logicisme, l'idée d'une science rationnelle qui ne présupposerait plus rien, se voit démenti par la régression axiomatique qui, si loin qu'elle pousse, trouve toujours devant soi un « antérieur » non assimilé. Mais pas plus qu'ils ne s'imposent par une évidence intrinsèque, pas davantage les axiomes ne résultent de décrets arbitraires. Le conventionalisme n'apparaît défendable que pour qui coupe artificiellement l'axiomatique de ses assises et de ses prolongements intuitifs, sans lesquels pourtant elle devient un jeu futile, sans rapports avec la science. La philosophie de la connaissance que suggère l'axiomatique, c'est un rationalisme qu'on n'ose appeler empirique, tellement les deux mots sont habituellement opposés, qu'on peut du moins qualifier d'inductif ou d'expérimental. Le rejet de tout *a priori*, apodictique ou décisoire, s'y double d'un égal refus des deux branches de l'alternative entre lesquelles l'empirisme, dans sa version contemporaine, prétend enfermer la connaissance : phénoménisme et nominalisme. Ni l'esprit ne contemple un donné à l'élaboration duquel il n'aurait pris aucune part, ni il ne s'épuise sur le plan des signes et du calcul formel. Et rien ne manifeste mieux son activité que l'établissement ou l'aperception d'une correspondance analogique entre le schéma symbolique et le modèle concret.

Imprimé en France
par MD Impressions
73, avenue Ronsard, 41100 Vendôme
Août 2009 — N° 55 393

IMPRIM'VERT. Votre imprimeur agit pour l'environnement

MD Impressions est titulaire du label Imprim'Vert®

Robert Blanché

L'axiomatique

◆ « On voit quelles attitudes philosophiques l'axiomatique contrarie, quelles elle favorise. Elle répugne à un dogmatisme de la synthèse, au rêve d'un point de départ absolu qui assurerait à la déduction une sécurité définitive. C'est à la totalité de la science qu'elle étend maintenant la forme hypothético-déductive ».

◆ « Comme la méthode expérimentale avait discrédité l'espoir cartésien d'une physique démonstrative, aujourd'hui le logicisme, l'idée d'une science rationnelle qui ne présupposerait plus rien, se voit démenti par la régression axiomatique qui, si loin qu'elle pousse, trouve toujours devant soi un "antérieur" non assimilé. Mais pas plus qu'ils ne s'imposent par une évidence intrinsèque, pas davantage les axiomes ne résultent de décrets arbitraires. »

Robert Blanché

◆ *Professeur à l'Université de Toulouse, Robert Blanché (1898-1975) était un spécialiste de la philosophie des sciences. Logicien spécialiste des mathématiques en particulier, il est l'auteur d'une œuvre importante dont* L'axiomatique *qui est devenu un ouvrage classique.*

ISBN : 978-2-13-057688-4

9 782130 576884

10 € TTC France

www.puf.com

puf

Quadrige GRANDS TEXTES

Couverture Atelier Didier Thimonier

Robert Blanché

L'axiomatique

◆ « On voit quelles attitudes philosophiques l'axiomatique contrarie, quelles elle favorise. Elle répugne à un dogmatisme de la synthèse, au rêve d'un point de départ absolu qui assurerait à la déduction une sécurité définitive. C'est à la totalité de la science qu'elle étend maintenant la forme hypothético-déductive ».

◆ « Comme la méthode expérimentale avait discrédité l'espoir cartésien d'une physique démonstrative, aujourd'hui le logicisme, l'idée d'une science rationnelle qui ne présupposerait plus rien, se voit démenti par la régression axiomatique qui, si loin qu'elle pousse, trouve toujours devant soi un "antérieur" non assimilé. Mais pas plus qu'ils ne s'imposent par une évidence intrinsèque, pas davantage les axiomes ne résultent de décrets arbitraires. »

Robert Blanché

◆ *Professeur à l'Université de Toulouse, Robert Blanché (1898-1975) était un spécialiste de la philosophie des sciences. Logicien spécialiste des mathématiques en particulier, il est l'auteur d'une œuvre importante dont* L'axiomatique *qui est devenu un ouvrage classique.*

Quadrige
GRANDS TEXTES

Robert Bla

L'axiomati

Robert Blanché

L'axiomatique

◆ « On voit quelles attitudes philosophiques l'axiomatique contrarie, quelles elle favorise. Elle répugne à un dogmatisme de la synthèse, au rêve d'un point de départ absolu qui assurerait à la déduction une sécurité définitive. C'est à la totalité de la science qu'elle étend maintenant la forme hypothético-déductive ».

◆ « Comme la méthode expérimentale avait discrédité l'espoir cartésien d'une physique démonstrative, aujourd'hui le logicisme, l'idée d'une science rationnelle qui ne présupposerait plus rien, se voit démenti par la régression axiomatique qui, si loin qu'elle pousse, trouve toujours devant soi un "antérieur" non assimilé. Mais pas plus qu'ils ne s'imposent par une évidence intrinsèque, pas davantage les axiomes ne résultent de décrets arbitraires. »

Robert Blanché

◆ *Professeur à l'Université de Toulouse, Robert Blanché (1898-1975) était un spécialiste de la philosophie des sciences. Logicien spécialiste des mathématiques en particulier, il est l'auteur d'une œuvre importante dont* L'axiomatique *qui est devenu un ouvrage classique.*

ISBN : 978-2-13-057688-4

9 782130 576884

10 € TTC France

www.puf.com

puf Quadrige GRANDS TEXTES

Couverture Atelier Didier Thimonier

Quadrige GRANDS TEXTES

Robert Blanché

L'axiomatique

puf